Michael Baumgartner

Basisprüfung lineare Algebra - Winter 2016

Im folgenden handelt es sich um einen <u>Lösungs-vorschlag</u> meinerseits und ich kann nicht für Korrektheit garantieren!

1.a) Gram-Schmidt:

$$b^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|_2} \qquad b^{(2)'} = a^{(2)} - \langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle b^{(1)} \qquad b^{(2)} = \frac{b^{(2)'}}{\|b^{(2)'}\|_2}$$

$$b^{(3)'} = a^{(3)} - \langle a^{(3)}, b^{(2)} \rangle b^{(2)} - \langle a^{(3)}, b^{(1)} \rangle b^{(1)} \qquad b^{(3)} = \frac{b^{(3)'}}{\|b^{(3)'}\|_2}$$

$$\underline{\underline{b^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$b^{(2)'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}}$$

$$b^{(3)'} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

b) Die Idee: $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ bilden gerade die Matrix Q

$\Rightarrow \underline{A} = \underline{Q}\,\underline{R} \quad \rightarrow$ 2 Möglichkeiten, entweder

1) $Q^{-1} A = R \qquad$ Bem. $Q^{-1} = Q^T$

2) Gaussen - Jordan

1) $Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}}$

2) $$\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 2 & 3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -2 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -2 & 3 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{array}$$

2) Ausgleichsrechnung mit SVD:

Die Matrix der Fehlergleichung lautet:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Singulärwertzerlegung:

$$A = USV^T$$

U: Besteht aus den EV von AA^T

V: Besteht aus den EV von A^TA

S: $\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_p})$ EW von AA^T oder A^TA $\quad p = \min(m,n)$

Es gibt wieder 2 Möglichkeiten. Man kann zuerst U oder aber V berechnen. Aufgrund der Dimension von A wird U eine 3×3 & V eine 2×2 Matrix.

Die jeweils andere Matrix erhält man mit dem Zusammenhang:

$$v^{(i)} = \frac{A^T u^{(i)}}{s^{(i)}} \quad \text{oder} \quad u^{(i)} = \frac{A v^{(i)}}{s^{(i)}}$$

Berechnet man zuerst V, so muss man den 3. Einheitsvektor von U noch mit Gram-Schmidt oder hier bei einer 3×3 Matrix mit dem Vektorprodukt rechnen. Wir berechnen hier beides

1) U:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

EW: $\det(AA^T - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 & -3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (5-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) - (5-\lambda) - (5-\lambda) - 3 - 3 - 9 + 9\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 35\lambda + \cancel{25} - \cancel{5} + \lambda - \cancel{5} + \lambda - \cancel{15} + 9\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 24\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 11\lambda - 24) = \lambda(\lambda-8)(-\lambda+3)$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = 8$

$\Rightarrow \quad \sigma_3 = 0 \qquad \underline{\sigma_2 = \sqrt{3}} \qquad \underline{\sigma_1 = 2\sqrt{2}}$ ⚠ Der Grösse nach ordnen!

EV: $\lambda_1 = 0$:

$$AA^T x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Kern}(AA^T)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \qquad x_2 = -2s \qquad x_1 = s$

$$\Rightarrow \quad u^{(3)'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{u^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\lambda_2 = 3: \quad (AA^T - 3I_3)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \qquad x_2 = s \qquad x_1 = s$

$$\Rightarrow u^{(2)'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\lambda_3 = 8: \quad (AA^T - 8I_3)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -7 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \qquad x_2 = 0 \qquad x_1 = -s$

$$\Rightarrow u^{(1)'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u^{(1)} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}} \qquad \underline{\underline{S} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Berechnung von V aus U:

$$v^{(1)} = \frac{A^T u^{(1)}}{s^{(1)}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}{2\sqrt{2}} = \frac{\begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}}{2\sqrt{2}} = \underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$v^{(2)} = \frac{A^T u^{(2)}}{s^{(2)}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}}{\sqrt{3}} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⚠ Wichtig: In der SVD dann V^T

2) Variante zuerst V berechnen (da V kleiner ist wahrscheinlich auch besser):

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

EW: $\det(A^T A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (8-\lambda)(3-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 8 \quad \lambda_2 = 3$$

$$\sigma_1 = 2\sqrt{2} \quad \sigma_2 = \sqrt{3}$$

EV: $\lambda_1 = 8 \quad (A^T A - 8 I_2)x = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}\right] \quad x_1 = s \quad x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

EV: $\lambda_2 = 3 \quad (A^T A - 3 I_2)x = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad x_2 = s \quad x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underline{\underline{S} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

U aus V berechnen:

$$u^{(1)} = \frac{Av^{(1)}}{s^{(1)}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{2\sqrt{2}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}{2\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(2)} = \frac{Av^{(2)}}{s^{(2)}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{3}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$u^{(3)}$ konstruieren mittels Vektorprodukt:

$$u^{(1)} \times u^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}$$

Wird <u>immer</u> bereits normiert sein?

$$\Rightarrow \underline{\underline{U}} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}$$

Man bemerkt, dass die Vorzeichen der Spalten sich unterscheiden können → U & V sind <u>nicht</u> eindeutig.
Die Methode 2 war deutlich schneller, lohnt sich wohl aber nur wenn der Dimensionsunterschied 1 beträgt und die Dimension des grösseren höchstens 3, da man ansonsten Gram-Schmidt anwenden muss.

Nun zum lösen des Ausgleichproblems:

Möchte die Residuen minimieren: $\min \|r\|_2^2$

$$\|r\|_2^2 = \|Ac - b\|_2^2 = \|USV^Tc - b\|_2^2$$

$$= \|U(SV^Tc - U^Tb)\|_2^2 \quad | \; U \text{ orth.} \rightarrow \|U\|_2 = 1$$

$$= \|SV^Tc - d\|_2^2 \quad | \; U^Tb = d$$

$$= \|\hat{S}V^Tc - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2 \quad | \; S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ müssen $\hat{S}V^Tc = d_0$ lösen!

$\rightarrow$ 2 Fälle

1) $\hat{S}$ invertierbar $\rightarrow$ $c = V\hat{S}^{-1}d_0$

2) $\hat{S}$ <u>nicht</u> invertierbar $\rightarrow$ $y = V^Tc$

$y = \hat{S}^+ d_0 \quad | \; \hat{S}^+ \rightarrow$ Pseudo-inverse

$c = Vy$

Ich benutze U & V aus der 2. Variante:

$$\Rightarrow \hat{S} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad \det \hat{S} = 2\sqrt{6} \neq 0 \rightarrow \text{invertierbar!}$$

$$d_0 = U^T \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

* kann man sich sparen

$$= \underline{\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow c = V \hat{S}^{-1} d_0 \qquad \hat{S}^{-1} = \frac{1}{\det \hat{S}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}} \qquad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \hat{S}^{+}$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}} \qquad \beta_2 = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}}$$

3) Diagonalisierung einer quadratischen unsymmetrischen Matrix.

a) EW: $\det(A-\lambda I_3) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$$= -\lambda \det\begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda(-\lambda(2-\lambda)-2) + 2(-2(2-\lambda)+2) + 4 + 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 4\lambda \cancel{-8} \cancel{+4} \cancel{+4} + 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 2\lambda + 8)$$

$$= \lambda(-\lambda-2)(\lambda-4)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 4$

Jeder EW hat AM $=1$ $\Rightarrow$ A ist auch wirklich diagonalisierbar?

(Da GM auch 1 sein muss)

EV: $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \text{Kern}(A)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \qquad x_2 = s \qquad x_1 = -s$

$\Rightarrow \quad t^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

könnte man noch normieren, für diese Aufgabe jedoch unnötig?

$\lambda_2 = -2 \qquad (A + 2I_3)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = 0 \qquad x_2 = s \qquad x_1 = s$

$$\Rightarrow \quad \underline{t^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$\lambda_3 = 4 \qquad (A - 4I_3)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \qquad x_2 = -s \qquad x_1 = s$

$$\Rightarrow \quad \underline{t^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\underline{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}} \checkmark \qquad \underline{\underline{\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}} \checkmark$$

Achtung: Reihenfolge von D & T beachten
immer EW & EV in gleicher Spalte!

b) Mein Vorschlag:

Die Eigenwerte aus D holen, potenzieren, ein neues D' machen und dann lösen, weils Gradinarn ist am Besten ohne Inverse.

Der Code würde dann in etwa so aussehen:

```
L1 = D(1,1);   % EW 1
L1_100 = L1^100;
L2 = D(2,2);   % EW 2
L2_100 = L2^100;
L3 = D(3,3);
L3_100 = L3^100;
D_100 = [L1_100   0        0
         0        L2_100   0
         0        0        L3_100];

y = T\v                 % w = T D_100 T^-1 v
w = T D_100 y
```

$$w = T\,D\_100\,\underbrace{T^{-1}v}_{y}$$

Ich weiss nicht wie wahrscheinlich es ist, dass dieses Jahr eine MatLab Aufgabe an der Prüfung gestellt wird, aber schaut, dass ihr alle nötigen Befehle in diesem Rahmen beherrscht.

4) a) Bedingungen für eine lineare Abbildung

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

2) $f(\alpha a) = \alpha f(a)$

→ wurde in den Übungen schonmal gemacht

Lösung: Zunächst ist $\mathcal{A}$ wohldefiniert in den angegebenen Räumen, da $t(1)'' = 0 \in \mathcal{U}_2$, $t(t^2)'' = 2t \in \mathcal{U}_2$ und $t(t^4)'' = 12t^3 \in \mathcal{U}_2$. Ausserdem gilt für alle $x, y \in \mathcal{G}_3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dass

$$\mathcal{A}(x + \alpha y) = t(x'' + \alpha y'') = tx'' + \alpha t y'' = \mathcal{A}x + \alpha \mathcal{A}y.$$

Somit ist $\mathcal{A}$ linear.

1. Zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert ist:

$\mathcal{F}(1) = 1 \in \mathcal{P}_4$, $\mathcal{F}(x) = 2x \in \mathcal{P}_4$, $\mathcal{F}(x^2) = 2x \in \mathcal{P}_4$, $\mathcal{F}(x^3) = 4x^3 \in \mathcal{P}_4$

2. Kriterien 1) & 2) überprüfen → <u>kann</u> und <u>sollte</u> man zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(a + \alpha b) &= x(a+\alpha b)' + (a + \alpha b) \\ &= x a' + \alpha x b' + a + \alpha b \\ &= x a' + a + \alpha(x b' + b) \\ &= \mathcal{F}(a) + \alpha \mathcal{F}(b) \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) Lineare Selbstabbildung: auf konsistente Reihenfolge achten!

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{\mathcal{F}} 1 &&= 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\ x &\to 2x &&= 0 + 2x + 0x^2 + 0x^3 \\ x^2 &\to 2x^2 + x^2 &&= 0 + 0x + 3x^2 + 0x^3 \\ x^3 &\to 3x^3 + x^3 &&= 0 + 0x + 0x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

Wenn der Koordinatenvektor so gelesen wird.

c) 2 Möglichkeiten

1) wie in b) nochmals

2) mit kommutativem Diagramm

1) $1 + x = 2x + 1 \qquad = 1 + 2x + 0x^2 + 0x^3$

$1 - x = -2x + 1 \qquad = 1 - 2x + 0x^2 + 0x^3$

$x^2 - 1 = 3x^2 - 1 \qquad = -1 + 0x + 3x^2 + 0x^3$

$1 + 2x - 2x^2 + x^3 =$

$3x^3 - 4x^2 + 2x + x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 + 4x - 6x^2 + 4x^3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2) $1 + x \qquad = 1 + 1x + 0x^2 + 0x^3$

$1 - x \qquad = 1 - 1x + 0x^2 + 0x^3$

$x^2 - 1 \qquad = -1 + 0x + 1x^2 + 0x^3$

$1 + 2x - 2x^2 + x^3 = 1 + 2x - 2x^2 + 1x^3$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A"] & B \\ \tilde{B} \arrow[u, "T"] \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow B = AT$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}}$$

Etwa gleich schnell, mit 2) muss man jedoch die Funktionen nicht mehr berechnen $\Rightarrow$ weniger Fehler.

Da mir die Lösungen nicht zur Verfügung stehen kann ich nicht garantieren, dass die folgende Argumentation hält!

5) a) Linearer Vektorraum $\rightarrow$ 7 Regeln

$M = \{ f \in C[x_0, x_n] : f|_{[x_{i-1}, x_i]} \in P_2[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n \}$

Interpretation: Menge aller Funktionen die auf dem Intervall $[x_0, x_n]$ stetig definiert sind.

Die Funktionen sind $\in P_2$ (also Polynome mit Grad <2) $\Rightarrow$ Monome der Form $ax+b$.

1) $\forall a(x), b(x) \in M : \quad a(x)+b(x) = b(x)+a(x)$

$a(x)+b(x) = a_1x + a_2 + b_1x + b_2 = (a_1+b_1)x + a_2 + b_2$

$= (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2) = b_1x + b_2 + a_1x + a_2$

$= b(x) + a(x)$

2) $\forall a(x), b(x), c(x) \in M : \quad a(x) + (b(x) + c(x)) = (a(x) + b(x)) + c(x)$

$= a_1x + a_2 + (b_1x + b_2 + c_1x + c_2)$

$= a_1x + a_2 + b_1x + b_2 + c_1x + c_2$

$= (a_1x + a_2 + b_1x + b_2) + c_1x + c_2$

$= (a(x) + b(x)) + c(x)$

3) $\exists 0 \in M$ s.d. $\forall a(x) \in M: \quad a(x) + 0 = a(x)$

$0 \in M := cx + d$ mit $c = d = 0$

$a(x) + 0 = a_1x + a_2 + 0x + 0 = a_1x + a_2$

$= a(x)$

4) $\forall a(x) \in M \; \exists -a(x) \in M$ s.d. $a(x) + (-a(x)) = 0$

$$a(x) = a_1 x + a_2$$
$$-a(x) := -a_1 x - a_2$$

$$a(x) + (-a(x)) = a_1 x + a_2 + (-a_1 x - a_2)$$
$$= (a_1 - a_1)x + (a_2 - a_2) = 0x + 0 =: 0$$

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; \forall a(x) \in M: \; (\alpha \cdot \beta) a(x) = \alpha(\beta \cdot a(x))$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot a(x) = (\alpha \cdot \beta)(a_1 x + a_2)$$
$$= \alpha\beta a_1 x + \alpha\beta a_2 = \alpha(\beta a_1 x + \beta a_2)$$
$$= \alpha(\beta a(x))$$

6) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; \forall a(x) \in M: \; (\alpha + \beta) a(x) = \alpha a(x) + \beta a(x)$

$$(\alpha + \beta) a(x) = (\alpha + \beta)(a_1 x + a_2) = \alpha a_1 x + \beta a_1 x + \alpha a_2 + \beta a_2$$
$$= \alpha(a_1 x + a_2) + \beta(a_1 x + a_2) = \alpha a(x) + \beta a(x)$$

7) $\forall a(x) \in M: \quad \mathbb{1} \cdot a(x) = a(x)$

$$\mathbb{1} := 1$$

$$\mathbb{1} \cdot a(x) = 1(a_1 x + a_2) = a_1 x + a_2 = a(x)$$

Ich nehme kaum an, dass ohne Zsmfsg solch eine Aufgabe kommt, und falls doch, würde ich eher folgendermassen Argumentieren, aber auch hier kann ich nicht garantieren, dass es reichen würde?

Alternative: Da alle $f \in M$ auch $\in C[x_0, x_n]$ kann man auch auf die Idee kommen, dass M ein Untervektorraum von C ist. Da man weiss, dass ein UVR auch ein VR ist, müsste man nur folgende zwei "einfachere" Bedingungen zeigen:

1) $\forall a, b \in M: \quad a + b \in M$

$a(x) + b(x) =$ Die Summe von 2 stetigen Funktionen vom Grad < 2

= Wieder eine stetige Funktion vom Grad $< 2 \quad \in M$

2) $\forall a \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot a \in M$

$\alpha\, a(x) =$ Eine stetige Funktion Grad < 2 mit einem Skalar multipliziert ist immernoch eine stetige Funktion Grad < 2.

Das Ganze mathematisch:

1) $\forall a(x), b(x) \in M: \quad a(x) + b(x) \in M$

$$a(x) + b(x) = a_1 x + a_2 + b_1 x + b_2 = a_1 x + b_1 x + a_2 + b_2$$
$$= (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) \quad \in M$$

2) $\forall a(x) \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot a(x) \in M$

$$\alpha \cdot a(x) = \alpha (a_1 x + a_2) = \alpha a_1 x + \alpha a_2 \quad \in M$$

b) Zu zeigen für lin. Unabhängigkeit

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x_j)\, x_j = 0 \quad \text{nur für} \quad x_j = 0 \quad \text{für } j \in [0, \dots, n]$$

da $f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$

folgt $\sum_{i=0}^{n} f_i(x_j)\, x_j = \underbrace{f_1(x_j)}_{0} x_1 + \underbrace{\dots}_{0} + \underbrace{f_j(x_j)}_{1} x_j + \underbrace{\dots}_{0} + \underbrace{f_n(x_j)}_{0} x_n$

$= x_j = 0 \iff x_j = 0$

Alternativ & vlt. etwas besser mittels Induktion:

(i) $j = 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x_1)\, x_1 = \underbrace{f_1(x_1)}_{1}\, x_1 = 0 \iff x_1 = 0 \ \checkmark$$

(ii) $k \to k+1$:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x_{k+1})\, x_{k+1} = \underbrace{f_k(x_{k+1})}_{0} x_k + \underbrace{f_{k+1}(x_{k+1})}_{1} x_{k+1} = 0$$

$$= 1\, x_{k+1} = 0 \iff x_{k+1} = 0 \ \checkmark$$

6) a) <u>True</u> $\to$ Verträglichkeitsbedingungen

b)
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}$$

$\to$ <u>True</u>

c) <u>False</u> $\to$ wir wissen nichts über die Permutationen in P $\to$ $\underline{\pm 60}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ EW 1 $\qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}$ EW 2

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ EW 1 $\to$ <u>False</u>

e)
$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\dim(\text{Bild}(A)) = \text{rang}(A) = 2$

<u>True</u>

f) Lösung einer solchen Diff. Gl. ist nach den Übungen:

Also gilt $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$ mit der Lösung

$$x_i(t) = c_i\, e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

$$y_1(t) = A^T x_1(t) = 0$$

$\Rightarrow$ <u>true</u>

g) $AA^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

EW: $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2$

$\sigma_1 = \sqrt{3} \quad \sigma_2 = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ <u>True</u>

h) $\underline{\underline{A}}$ ist symmetrisch $\rightarrow$ Spektralsatz

$\exists\, T, D: \quad A = TDT^T \quad \Rightarrow$ <u>True</u>